

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные опiski в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательно краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставаемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф.м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф.м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохри-ну (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2015–2016 учебном году
11 класс**

Время выполнения заданий — 4 часа

11.1. Функция $f(x)$ определена для всех действительных чисел x , принимает действительные значения и удовлетворяет тождеству

$$f(x + f(y)) = 2x + 4y + 3 \text{ для всех } x, y.$$

Найдите все такие функции $f(x)$.

Решение: Положим $x = -f(y)$. Получим $f(0) = 3 + 4y - 2f(y)$. Положим $y = 0$, найдём $f(0) = 1$. Тогда $f(y) = 2y + 1$. Это — необходимое условие. Покажем, что оно является и достаточным, для чего сделаем проверку:

$$f(x + f(y)) = f(x + 2y + 1) = 2(x + 2y + 1) + 1 = 2x + 4y + 3.$$

Проверка показала, что функция $f(x) = 2x + 1$ действительно удовлетворяет условию задачи.

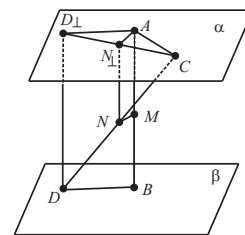
Ответ: Такая функция единственна $f(x) = 2x + 1$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Задача решена при дополнительных ограничениях на $f(x)$, например, в предположении её линейности	3 балла
Показано, что функция $f(x) = 2x + 1$ удовлетворяет уравнению, но не доказано, что других таких функций нет	2 балла
Доказано, что $f(0) = 1$ (других продвижений нет)	1 балл
Выкладки любой длины, не ведущие к решению	0 баллов

11.2. Между двумя параллельными плоскостями заключены перпендикуляр длиной 4 м и наклонная, равная 6 м. Расстояния между их концами в каждой плоскости равны по 3 м. Найдите расстояние (в метрах) между серединами перпендикуляра и наклонной.

Решение: Обозначим параллельные плоскости через α и β , концы перпендикуляра буквами A и B , его середину — буквой M , концы наклонной — буквами C и D (точки A и C лежат в плоскости α , а B и D — в плоскости β), её середину — буквой N . Заметим, что $MN \parallel \alpha$, так как и точка M и точка N лежат в плоскости, делящей пополам расстояние между параллельными плоскостями α и β . Спроецируем все точки на плоскость α (см. рисунок). Проекции точек будем обозначать теми же буквами, но со значком перпендикуляра внизу.



К решению
задачи 11.2

Ясно, что $B_{\perp} = M_{\perp} = A$, и что $N_{\perp}$ — середина отрезка $CD_{\perp}$. В силу того, что отрезок MN параллелен плоскости α , $MN = AN_{\perp}$. Стороны треугольника $ACD_{\perp}$ легко находятся: $AC = 3$ по условию; $AD_{\perp} = BD = 3$; $CD_{\perp} = \sqrt{CD^2 - DD_{\perp}^2} = \sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5}$. Остается найти длину медианы $AN_{\perp}$, проведённой к основанию $CD_{\perp}$ равнобедренного треугольника $ACD_{\perp}$. Она равна

$$\sqrt{AC^2 - \left(\frac{CD_{\perp}}{2}\right)^2} = 2.$$

Ответ: 2 м.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Имеется идея проекции на плоскость (не доведённая до решения)	2 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Анализ геометрических конструкций, не соответствующих условию задачи	0 баллов

11.3. Пусть a — положительное иррациональное число. Может ли случиться так, что число $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1} - \sqrt{a}}$ окажется целым?

Решение: $m = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1} - \sqrt{a}}$. Найдём из этого уравнения a .

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1} - \sqrt{a}} \Leftrightarrow m\sqrt{a+1} - m\sqrt{a} = \sqrt{a} \Leftrightarrow m\sqrt{a+1} = \sqrt{a}(m+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = \frac{m+1}{m} \Leftrightarrow \frac{a+1}{a} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{a} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{(m+1)^2 - m^2}{m^2} \Leftrightarrow a = \frac{m^2}{2m+1}. \end{aligned}$$

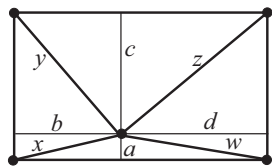
Теперь видно, что если число m — рациональное (тем более, если целое), то рациональным будет и число a . Значит, если a — иррационально, то и m тоже иррационально.

Ответ: Не может.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Обоснование, что данная дробь не может равняться конкретным целым числам	2 балла
Любые преобразования, не ведущие к решению и/или ответ без обоснования	0 баллов

11.4. Внутри прямоугольника $ABCD$ отметили точку M . Оказалось, что $AM = 4$, $BM = 8$, $CM = 7$. Какие значения может принимать величина DM ?



К решению задачи 11.4

Решение: Пусть внутри некоторого прямоугольника отмечена произвольная точка. Обозначим расстояния от неё до вершин прямоугольника буквами w , x , y и z , а до сторон — буквами a , b , c и d так, как показано на рисунке. Применяя 4 раза теорему Пифагора, получаем систему

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = x^2, \\ b^2 + c^2 = y^2, \\ c^2 + d^2 = z^2, \\ d^2 + a^2 = w^2. \end{cases}$$

Складывая левые и правые части первого и третьего уравнений системы, получаем равенство $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = x^2 + z^2$, а проделав те же действия с двумя другими уравнениями — равенство $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = y^2 + w^2$. Отсюда $x^2 + z^2 = y^2 + w^2$, и мы получили следующее свойство:

Суммы квадратов расстояний от произвольной точки прямоугольника до двух противоположных его вершин равны между собой.

Переходя к числовым данным нашей задачи, получаем $4^2 + 7^2 = 8^2 + DM^2$, откуда $DM = 1$.

Ответ: Только значение, равное 1.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Ответ неверен только из-за арифметических ошибок	6 баллов
Задача решена для нескольких конкретных прямоугольников (например, для квадрата), причём решение не проходит в общем случае	3 балла
Сформулировано, но не доказано свойство о равенстве сумм квадратов расстояний до двух противоположных вершин прямоугольника	2 балла
Геометрические построения и алгебраические выкладки, не ведущие к решению	0 баллов

11.5. На зачёт к преподавателю английского языка пришли 30 студентов: 13 с факультета экономики, 9 с факультета математики и 8 с факультета компьютерных наук. Их одинаковые внешние зачётные книжки лежат на столе. Какое наибольшее количество зачётных книжек должен взять преподаватель, чтобы быть уверенным, что среди оставшихся на столе присутствуют зачётки по меньшей мере 7-и студентов одного факультета и 4-х студентов другого?

Решение: Если взять 5 зачёток студентов факультета компьютерных наук и 6 зачёток студентов факультета математики, то не найдётся семи студентов одного факультета и четырёх — другого, чьи зачётки останутся лежать на столе. Значит, 11 зачёток взять нельзя. Возьмём произвольные 10 зачёток. Невозможно, чтобы среди них одновременно нашлись 7 зачёток студентов-экономистов, 3 зачётки студентов-математиков и две зачётки студентов факультета компьютерных наук. Значит, точно есть факультет, у семи студентов которого зачётки лежат на столе. Рассмотрим два оставшихся факультета. На столе вначале лежало по крайней мере $8 + 9 = 17$ зачёток студентов этих факультетов. Взято не более 10 из них, значит, осталось не менее 7. По принципу Дирихле хотя бы 4 зачётки принадлежат студентам одного факультета. Условие задачи выполнено.

Ответ: 10 зачётных книжек.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что 10 зачёток взять можно, но нет примера, показывающего, что 11 зачёток взять нельзя	4 балла
Приведён пример взятых 11 зачёток, при котором условие не выполнено, а утверждение, что 10 зачёток взять можно, не доказано	3 балла
Верный ответ без обоснования	0 баллов

11.6. На вертикали «h» пустой шахматной доски (см. рисунок) стоит ферзь. Два игрока ходят этим ферзём по очереди, причём за один ход можно передвинуть ферзя только или влево по горизонтали, или вниз по вертикали, или влево-вниз по диагонали (на одну или несколько клеток). Игрок, поставивший ферзя в левый нижний угол (на поле a1), объявляется победителем. На каком поле стоит ферзь, если дополнительно известно, что противник начинающего имеет в эту игру выигрышную стратегию?

Решение:

Способ 1. (переборный). Если ферзь первоначально стоит на поле h1 или h8, начинающий выигрывает, немедленно ставя ферзя в угол.

Если ферзь первоначально стоит на поле h2 или h7, начинающий может первым ходом переместить его на поле c2. Далее при любом ходе второго он ставит ферзя в угол и тоже выигрывает. Аналогичная ситуация возникает, если ферзь первоначально стоит на поле h3 — выигрывает ход на поле b3.

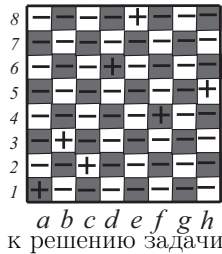
Если ферзь стоит на полях h4 или h6, начинающий выигрывает, делая первый ход на поле f4. Видно, что при любом ходе противника он сможет вторым ходом поставить ферзя на одно из полей a1, b3 или c2 и свести игру к предыдущим случаям.

Наконец, при положении ферзя на h5 любой ход начинающего позволит его противнику занять ферзём одно из полей a1, b3, c2 или f4 и победить, как указано выше.

Значит, h5 — единственное поле вертикали h, начиная с которого, первый проигрывает.

Способ 2. Будем последовательно помечать поля шахматной доски символами «+» или «-» в соответствии со следующими правилами.

- 1) Поле a1 помечим символом «+».
- 2) Если ферзь с некоторого ещё непомеченного поля может в один ход попасть на поле, помеченное символом «+», помечим это поле символом «-».



к решению задачи

11.6, второй способ

На четвёртом шаге помечим минусами все непомеченные ещё поля вертикалей «b», «c», горизонталей 2, 3 и диагоналей a2 — g8 и b1 — h7.

На пятом шаге помечим плюсами поля d6 и f4.

На шестом шаге помечим минусами все непомеченные ещё поля вертикалей «d», «f», горизонталей 4, 6 и диагоналей a3 — f8 и c1 — h6.

На последнем седьмом шаге помечим плюсами поля e8 и h5.

Полученная разметка доски приведена на рисунке.

Теперь заметим, что если ферзь стоит на поле, помеченным плюсом, то начинающий обязательно сходит на клетку с минусом. После этого второй игрок будет иметь возможность вновь стать на клетку с плюсом, начинающий снова вынужден будет идти на клетку с минусом и т. д. Значит, играющий первым никогда не сможет поставить ферзя на поле a1, то есть не сможет выиграть. Поскольку каждым ходом ферзь приближается к полю a1, игра закончится за конечное число ходов, и второй игрок победит. Аналогично, если изначально ферзь стоит на поле, помеченным минусом, начинающий может в один ход переместить его на клетку с плюсом, после чего применять описанную выше стратегию, которая гарантирует ему победу. Остаётся убедиться, что единственным полем на вертикали «h», которое помечена плюсом, является поле h5.

Примечание: Система плюсов — минусов, описанная в решении, есть просто система выигрышных и проигрышных позиций для начинающего. Любая позиционная игра может быть проанализирована схожим образом.

Ответ: На поле h_5 .

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Обосновано, что при ферзе на поле h_5 выигрывает второй игрок, а при ферзе на остальных полях линии h — первый	7 баллов
Обосновано, что при ферзе на поле h_5 выигрывает второй игрок, и доказаны два пункта из трёх (см. критерий на 1 балл)	6 баллов
Обосновано, что при ферзе на поле h_5 выигрывает второй игрок, и доказан один пункт из трёх (см. критерий на 1 балл)	5 баллов
Обосновано, что при ферзе на поле h_5 выигрывает второй игрок, ситуация с другим положением ферзя не проанализированы	4 балла
Доказаны все 3 пункта (см. критерий на 1 балл), ситуация с положением ферзя не h_5 не проанализирована ИЛИ есть идея (не доведённая до конца) определения выигрышных позиций	3 балла
Доказаны два пункта из трёх (см. критерий на 1 балл)	2 балла
Доказан один из трёх пунктов: а) ферзь не стоит на полях h_1 и h_8 ; б) ферзь не стоит на полях h_2 , h_3 и h_7 ; в) ферзь не стоит на полях h_4 и h_6 .	1 балл
Ответ без обоснования	0 баллов